Vektoren und Matrizen

Übungen 3 + Antworten: Dyadische Produkte

Diese Übungen beziehen sich auf Anwendungen des dyadischen Produkts zweier Vektoren. Dyadische Produkte sind oft hilfreich, um bestimmte Sachverhalte auszudrücken. Das dyadische Produkt wird im Skriptum 'Vektoren und Matrizen', Seite 10 definiert.

1. **Aufgabe:** Nach Satz 2.1 des Skriptums (S. 28) kann eine beliebige $(m \times n)$-Matrix als Produkt $X = QA'$ zweier Matrizen mit jeweils einem Rang von $r \leq \min(m, n)$ dargestellt werden. Es sei $Q = [\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_r]$, $A = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r]$ (In Satz 2.1 wird $X = UV$ geschrieben, d.h. es ist hier $Q = U$, $V = A'$. Der Grund für diese Umbenennung sind die in der Faktorenanalyse gebräuchlichen Schreibweisen).

   Zeigen Sie, dass dann

   $$X = \mathbf{q}_1\mathbf{a}_1' + \mathbf{q}_2\mathbf{a}_2' + \cdots + \mathbf{q}_r\mathbf{a}_r',$$

   und insbesondere

   $$x_{ij} = q_{i1}a_{j1} + \cdots + q_{ir}a_{jr}$$

   gilt, q_{ik} die i-te Komponente von $\mathbf{q}_k$, a_{jk} die j-te Komponente von $\mathbf{a}_j$.

   Lösung: Entsprechend $X = QA'$ kann man

   $$X = [\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \mathbf{a}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_r' \end{bmatrix} = \mathbf{q}_1\mathbf{a}_1' + \mathbf{q}_2\mathbf{a}_2' + \cdots + \mathbf{q}_n\mathbf{a}_n'$$

   schreiben.

   Die $\mathbf{q}_k$ sind m-dimensionale Vektoren, die $\mathbf{a}_k$ sind n-dimensionale Vektoren, $k = 1, \ldots, r$. Es ist

   $$\mathbf{q}_k\mathbf{a}_k' = \begin{pmatrix} q_{1k} \\ q_{2k} \\ \vdots \\ q_{mk} \end{pmatrix} (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{rk}) = \begin{pmatrix} q_{1k}a_{1k} & \cdots & q_{1k}a_{jk} & \cdots & q_{1k}a_{nk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{ik}a_{1k} & \cdots & q_{ik}a_{jk} & \cdots & q_{ik}a_{nk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{mk}a_{1k} & \cdots & q_{mk}a_{jk} & \cdots & q_{mk}a_{nk} \end{pmatrix}$$

Es sei $\tilde{\mathbf{q}}_i$ der i-te Zeilenvektor von X und $\tilde{\mathbf{a}}_j$ der j-te Zeilenvektor von A (salso der j-te Spaltenvekotr von A'. Dann ist

$$x_{ij} = q_{i1}a_{j1} + \cdots + q_{ik}a_{jk} + \cdots + q_{ir}a_{jr}$$

Der Term $q_{ik}a_{jk}$ ist gerade das (i, j)-te Element von $\mathbf{q}_k\mathbf{a}'_k$. Über die Summe $\sum_k \mathbf{q}_k\mathbf{a}'_k$ der dyadischen Produkte läßt sich also gleich die ganze Matrix X darstellen.

2. **Aufgabe:** Es sei R eine symmetrische Matrix, z.b. eine Matrix von Korrelationen r_{jk}; Wegen $r_{jk} = r_{kj}$ für alle $j, k = 1, \ldots, n$ ist dann $R' = R$. Es kann gezeigt werden (in der kommenden Vorlesung), dass für eine symmetrische Matrix immer eine $(n \times n)$-Matrix P und eine Diagonalmatrix $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ existieren derart, dass

$$R = P\Lambda P',$$

wobei P orthonormal ist (aber diese Eigenschaft ist für die folgende Frage nicht relevant). Es sei $P = [\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n]$, $\mathbf{p}_k$, $k = 1, \ldots, n$ die Spaltenvektoren von P. Zeigen Sie, dass dann R in der Form

$$R = \lambda_1\mathbf{p}_1\mathbf{p}'_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2\mathbf{p}'_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{p}_n\mathbf{p}'_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\mathbf{p}_k\mathbf{p}'_k$$

dargestellt werden kann. Wie lautet insbesondere der Ausdruck für das Element r_{jk} von R?

Lösung: Mit $P = [\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n]$ und $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ hat man

$$P\Lambda = [\lambda_1\mathbf{p}_1, \ldots, \lambda_n\mathbf{p}_n],$$

so dass

$$R = P\Lambda P' = \lambda_1\mathbf{p}_1\mathbf{p}'_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{p}_n\mathbf{p}'_n$$

Der Vorteil dieser Darstellung: man sieht deutlicher, in welcher Weise die Eigenwerte in die Korrelationen eingehen. Im Zusammenhang mit der multplen Regression wird insbesondere die Darstellung von $R^{-1} = P\Lambda^{-1}P'$ interessant.

Für Darstellung von r_{jk} (besser: r_{ij}, weil der Index k schon für die Summation über die latenten Variablen gebraucht wurde) erhält man

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_{ik} p_{jk}.$$

3. Es sei X eine $(m \times n)$-Matrix von spaltenzentrierten Messwerten. Es sei

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}$$

der i-te *Zeilen*vektor von X, – hier als Spaltenvektor angeschrieben. Offenbar ist $C = \frac{1}{m}X'X$ die Matrix der Kovarianzen zwischen den Variablen (die den Spalten von X entsprechen).

Zeigen Sie, dass C auch in der Form

$$C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \tilde{\mathbf{x}}_i \tilde{\mathbf{x}}_i'$$

geschrieben werden kann.

Lösung: Es ist

$$\tilde{\mathbf{x}}_i \tilde{\mathbf{x}}_i' = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix} (x_{i1}, \ldots x_{in}) = \begin{pmatrix} x_{i1}x_{i1} & x_{i1}x_{i2} & \cdots & x_{i1}x_{in} \\ x_{i2}x_{i1} & x_{i2}x_{i2} & \cdots & x_{i2}x_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{in}x_{i1} & x_{in}x_{i2} & \cdots & x_{in}x_{in} \end{pmatrix}$$

Andererseits ist

$$c_{jk} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}x_{ik}$$

Das Produkt $x_{ij}x_{ik}$ ist aber gerade das (j,k)-te Element von $\tilde{\mathbf{x}}_i \tilde{\mathbf{x}}_i'$, daher erhält man dann

$$C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}x_{ik}.$$