Vektoren und Matrizen

Übungen 2 + Antworten

Aufgaben:

1. **Aufgabe:** Es sei A eine $(m \cdot n)$-Matrix und I_n sei die $(n \cdot n)$-Einheitsmatrix, d.h. die Zeilen- und Spaltenvektoren bestehen aus den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Vergewissern Sie sich, dass $AI_n = A$, und $I_m A = A$, I_m die $(m \times m)$-Einheitsmatrix.

   Antwort:

$$AI_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}1 + a_{12}0, & a_{11}0 + a_{12}1 \\ a_{21}1 + a_{22}0, & a_{21}0 + a_{22}1 \\ a_{31}1 + a_{32}0, & a_{31}0 + a_{32}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

2. **Aufgabe:** Es sei

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}} \begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie, dass das Produkt XY gleich der (2×2)-Einheitsmatrix I_2 ist; für die Matrix Y gilt $Y = X^{-1}$, X^{-1} ist die zu X *inverse Matrix* (oder einfach *die Inverse*).

   Welche Voraussetzung muß erfüllt sein, damit die Inverse existiert?

   Antwort: $\lambda = 1/(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})$ ist ein Faktor, der mit jedem Element in der Matrix für multipliziert werden muß. Dann ist

$$\begin{aligned} XY &= \lambda \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}, & -x_{11}x_{12} + x_{12}x_{11} \\ x_{21}x_{22} - x_{22}x_{21}, & -x_{21}x_{12} + x_{11}x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Notwendige Bedingung für die Existenz der Inversen ist $x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \neq 0$, d.h. die lineare Unabhängigkeit der Vektoren in X.

3. **Aufgabe:** Wie zeigt man, dass *alle* 2-dimensionalen Vektoren als Linearkombinationen von zwei beliebigen, aber linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ dargestellt werden können?

   Antwort: $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$, $\mathbf{y} = X\mathbf{a}$, $\mathbf{y}$ beliebig vorgegeben, $\mathbf{a}$ unbekannt. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ linear unabhängig $\Rightarrow X^{-1}$ existiert, also existiert die Lösung $\mathbf{a} = X^{-1}\mathbf{y}$. Die lineare Unabhängigkeit ist notwendig und hinreichend für die Existenz des Vektors $\mathbf{a}$ (vergl. Skriptum, Seite 16).

4. **Aufgabe:** X sei wie in der vorangegangenen Aufgabe definiert. Gilt insbesondere einerseits

$$Y = XA, \quad Y = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2],\ X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2],\ A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$$

   und andererseits

$$X = YB,\ B = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2],$$

   und $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ seien linear unabhängig. Welche Relation existiert zwischen den Matrizen A und B?

   Antwort:

$$Y = XA,\ X = YB \Rightarrow Y = YBA \Rightarrow BA = I \Rightarrow B^{-1} = A \text{ bzw. } B = A^{-1}.$$

5. **Aufgabe:** Gegeben seien die 5-dimensionalen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_1$ hat eine 1 als erste Komponente, $\mathbf{e}_2$ hat eine 1 als zweite Komponente, $\mathbf{e}_3$ hat die 1 als dritte Komponente); $\mathbf{x}$ sei eine Linearkombination dieser Vektoren. Hat $\mathbf{x}$ Komponenten, die gleich Null sind, und falls ja, welche sind es? (Vergl Satz 1.4, p. 17 im Skriptum). Es sei $T = (t_{ij})$ eine (5×5)-Matrix, $t_{ij} \neq 0$ für alle i, j. Es sei $\mathbf{y} = T\mathbf{x}$. Wieviele Komponenten hat $\mathbf{y}$, die gleich Null sind?

   Antwort:

$$\mathbf{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & t_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + t_{23}x_3 \\ \vdots \\ t_{51}x_1 + t_{52}x_2 + t_{53}x_3 \end{pmatrix},$$

   d.h. $\mathbf{y}$ hat 0 Komponenten, die gleich Null sind. $\mathbf{y}$ ist eine Linearkombination der ersten drei Spaltenvektoren von T.

6. **Aufgabe:** Es seien zehn 100-dimensionale Vektoren $\mathbf{x}_j$, $j = 1, \dots, 10$ gegeben; jeder Vektor $\mathbf{x}_j$ sei als Linearkombination von 3 orthonormalen 100-dimensionlen Vektoren $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$ darstellbar:

   $$\mathbf{x}_j = a_{j1}\mathbf{L}_1 + a_{j2}\mathbf{L}_2 + a_{j3}\mathbf{L}_3.$$

   Zeigen Sie, dass die Koeffizienten a_{jk} einer Korrelation zwischen $\mathbf{x}_j$ und $\mathbf{L}_k$ entsprechen (vergl. Seite 22, Skriptum $\rightarrow$ orthonormale Basisentwicklung). Wieviele Dimensionen hat der Teilraum, in dem die $\mathbf{x}_j$ liegen?

   Antwort: Es ist

   $$\mathbf{L}_1'\mathbf{x}_j = a_{j1}\mathbf{L}_1'\mathbf{L}_1 + a_{j2}\mathbf{L}_2'\mathbf{L}_2 + a_{j3}\mathbf{L}_1'\mathbf{L}_3 = a_{j1},$$

   da $\mathbf{L}_1'\mathbf{L}_1 = 1$, $\mathbf{L}_k'\mathbf{L}_k = 0$ für $k = 2, 3$. Analog für a_{j2} und a_{j3}. $\mathbf{L}_k'\mathbf{x}_j$ ist gleich einer Korrelation, wenn die $\mathbf{x}_j$ und die $\mathbf{L}_k$ normiert sind.

7. **Aufgabe:** Gegeben sei die Matrix $L = [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3]$, wobei die $\mathbf{L}_k$ paarweise orthogonal seien. Welche Form hat die Matrix $L'L$, und wie lautet die Matrixgleichung, mit der Sie eine Normalisierung der $\mathbf{L}_k$ erreichen?

   Antwort: (s. Seiten 11, 26 Skriptum)

   $$L'L = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_j = \|\mathbf{L}_j\|^2,\ j = 1, 2, 3$$

   Es ist $\|\mathbf{L}_j\| = \sqrt{\lambda_j} = \lambda_j^{1/2}$, $1/\lambda_j^{1/2} = \lambda_j^{-1/2}$, also

   $$Q = L \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1/2} & 0 & \\ 0 & \lambda_2^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1/2} \end{pmatrix} = L\Lambda^{-1/2}.$$

   Q ist eine Matrix von auf die Länge 1 normierten Vektoren. Multiplikation von L mit der k-ten Spalte von $\Lambda^{-1/2}$ skaliert den k-ten Spaltenvektor $\mathbf{L}_k$ von L mit $\lambda_k^{-1/2}$ und erzeugt so den k-ten Spaltenvektor $\mathbf{q}_k$ von Q.

8. **Aufgabe:** In faktorenanalytischen Modellen werden die zentrierten Messerte x_{ij} durch

   $$x_{ij} = a_{j1}L_{i1} + \cdots + a_{jn}L_{in}, \tag{1}$$

   also durch das Skalarprodukt t $\mathbf{a}_j'\mathbf{L}_i$ "erklärt". Welche Bedeutung hat der Spezialfall, dass $\mathbf{a}_j$ und $\mathbf{L}_i$ orthogonal sind, und wann nimmt x_{ij} einen maximalen Wert an?

   Antwort: Sind X_{ij} die Messwerte und ist $\bar{x}_j$ der Mittelwert der Werte für die j-te Variable, so soll $x_{ij} = X_{ij} - \bar{x}_j$ sein. $x_{ij} = 0$ für $X_{ij} = \bar{x}_j$. Die Orthogonalität von $\mathbf{a}_j$ und $\mathbf{L}_i$ bedeutet also, dass $X_{ij} = \bar{x}_j$. Die Maße

a_{jk}, mit denen die Tests die latenten Variablen erfassen, korrelieren dann nicht mit dem Profil der Maße, mit denen die i-te Person mit den latenten Variablen ausgestattet ist. Deswegen erzielt die i-te Person den mittleren Meswert $X_{ij} = \bar{x}_j$.

$\mathbf{a}_j'\mathbf{L}_i = \|\mathbf{a}_j\|\|bL_i\|\cos\theta$ und $\cos\theta \leq 1$. Deshalb gilt allgemein $\mathbf{a}_j'\mathbf{L}_i \leq \|\mathbf{a}_j\|\|\mathbf{L}_i\|$; Sind die Vektoren $\mathbf{a}_j$ und $\mathbf{L}_i$ allerdings parallel, so ist $\theta = 0$ und $\cos\theta = 1$, und in diesem Fall folgt

$$x_{ij} = \mathbf{a}_j'\mathbf{L}_i = \|\mathbf{a}_j\|\|\mathbf{L}_i\|.$$

Dies ist der maximalmögliche Wert für x_{ij}. Dieser Wert ist maximal relativ zu den Werten von $\|\mathbf{a}_j\|$ und $\|\mathbf{L}_i\|$. Verschiedene Individuen können sich hinsichtlich des Wertes von $\|\mathbf{L}_i\|$ unterscheiden: je größer dieser Wert, desto größer kann x_{ij} werden. $\|\mathbf{L}_i\|$ ist um so größer, je größer die Ausprägungen der latenten Merkmale bei einer Person sind.

Anmerkung: Die Ungleichung $\mathbf{a}_j'\mathbf{L}_i \leq \|\mathbf{a}_j\|\|\mathbf{L}_i\|$ ist die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*, die in allgemeiner Form für irgendzwei n-dimensionale Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in der Form

$$\mathbf{x}'\mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \text{ bzw. } \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left|\sum_{i=1}^n x_i^2\right|^{1/2} \left|\sum_{i=1}^n y_i^2\right|^{1/2} \tag{2}$$

oder in der Form

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \tag{3}$$

angeschrieben wird. Vergl. auch den Anhang des Skriptums.