Vektoren und Matrizen

Übungen 1 + Antworten

Aufgabe 1: Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{x}_1 = (1,2)'$ und $\mathbf{x}_2 = (2,3)'$. Lassen sich Koeffizienten a und b finden derart, dass $a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 = \vec{0} = (0,0)'$? Welchen Wert hat das Skalarprodukt $\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2$? Sind $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ linear abhängig oder linear unabhängig?

Antwort: Es soll

$$a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 = \vec{0}$$

gelten, also

$$a \cdot 1 + b \cdot 2 = 0 \quad (1)$$

$$a \cdot 2 + b \cdot 3 = 0 \quad (2)$$

$a = b = 0$ ist sicherlich eine Lösung. Nun werde angenomnmen, es gebe noch eine Lösung mit $a, b \neq 0$. Aus (1) folgt $a = -2b$, so dass aus (2) $-4b + 3b = 0$ folgt, also $3 = 4$, was nur in Hexenkreisen als akzeptierbare Lösung gilt[1]. Die Normalbevölkerung hält aber an der Aussage $3 \neq 4$ mit der Implikation $a = b = 0$ fest und folgert daraus, dass $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 2: Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{x}_1 = (1,2)'$, $\mathbf{x}_2 = (2,3)'$ und $\mathbf{x}_3 = (1,1.5)'$. Für welches Paar $(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)$ gilt $\cos\theta_{jk} = 1$, θ_{jk} der Winkel zwischen den entsprechenden Vektoren? Sind die Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ linear abhängig oder linear unabhängig?

Antworten: Fokussierte Betrachtung der Komponenten führt zu dem Schluß, dass $\cos\theta_{23} = 1$ sein muß, denn die Komponenten dieser beiden Vektoren unterschieden sich nur durch den Faktor 1/2:

$$\mathbf{x}_2'\mathbf{x}_3 = 2 \times 1 + 3 \times 1.5 = 2 + 4.5 = 6.5.$$

Weiter gilt

$$\|\mathbf{x}_2\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, \ \|\mathbf{x}_3\| = \sqrt{1^2 + 1.5^2} = \sqrt{3.15},$$

[1]"Du mußt verstehn! – Aus Eins mach Zehn, – Und Zwei laß gehn, – Und Drei mach gleich, – So bist du reich. – Verlier die Vier! – Aus Fünf und Sechs, – So sagt die Hex', – Mach Sieben und Acht, – So ist's vollbracht: – Und Neun ist Eins, – Und Zehn ist keins. – Das ist das Hexen-Einmaleins." Worauf Mephisto spricht: "Mich dünkt, die Alte spricht im Fieber".

und $\sqrt{13}\sqrt{3.15} = \sqrt{13 \times 3.15} = 6.5$, so dass für diese beiden Vektoren

$$\cos\theta_{23} = \frac{\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1\|\|\mathbf{x}_2\|} = 1$$

gilt.

Wenn die $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ linear unabhängig sind, so gibt es nur eine Lösung für

$$a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 + c\mathbf{x}_3 = \vec{0},$$

nämlich $a = b = c = 0$. Man hat

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 1 &= 0 \quad (3) \\ a \cdot 2 + b \cdot 3 + c \cdot 1.5 &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Aus (3) folgt $b = -\frac{1}{2}(a+c)$, so dass (4)

$$2a - \frac{3}{2}(a+c) + 1.5c = (2 - \frac{3}{2})a + (1.5 - \frac{3}{2})c = 0$$

liefert, also $\frac{1}{2}a + 0 \cdot c = 0$, also $a = 0$. Die Gleichungen (3) und (4) implizieren dann $c = \frac{1}{2}b$, so dass diese Gleichungen Lösungen $a = 0$, $b \neq 0$, $c = b/2$ zulassen. Also ist $a = b = c = 0$ nicht die einzige Lösung, d.h. die $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ sind linear abhängig.

Aufgabe 3: Es seien $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ Vektoren und es gelte $\mathbf{x} \nparallel \mathbf{y}$, d.h. $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ seien nicht parallel. Es gelte $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \mathbf{z}$ für bestimmte Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$. Weiter seien

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|},\ \tilde{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|},\ \tilde{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|}$$

die korrespondierenden normierten Vektoren. Existieren Koeffizienten α und β mit

$$\alpha\tilde{\mathbf{x}} + \beta\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{z}}\ ?$$

Unter welchen Bedingungen gilt

$$a\tilde{\mathbf{x}} + b\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{z}}\ ?$$

(Anmerkung: die Normierung läßt die Orientierung der Vektoren invariant.)

Antworten: Nach Voraussetzung bzw. Annahme gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} a\mathbf{x} + b\mathbf{y} &= \mathbf{z} \quad (5) \\ \alpha\tilde{\mathbf{x}} + \beta\tilde{\mathbf{y}} &= \tilde{\mathbf{z}} \quad (6) \end{aligned}$$

Dann muß

$$\frac{\alpha}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x} + \frac{\beta}{\|\mathbf{y}\|}\mathbf{y} = \frac{1}{\|\mathbf{z}\|}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})$$

gelten. Daraus folgt

$$\left(\frac{\alpha}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{a}{\|\mathbf{z}\|}\right)\mathbf{x} + \left(\frac{\beta}{\|\mathbf{y}\|} - \frac{b}{\|\mathbf{z}\|}\right)\mathbf{y} = \vec{0}.$$

Nach Voraussetzung sind aber $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ linear unabhängig, so dass

$$\frac{\alpha}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x} - \frac{a}{\|\mathbf{z}\|} = 0, \quad \frac{\beta}{\|\mathbf{y}\|} - \frac{b}{\|\mathbf{z}\|} = 0$$

gelten müssen, also

$$\alpha = a\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{z}\|}, \quad \beta = b\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{z}\|}$$

Die Koeffizienten α und β existieren also. Damit auch $a\tilde{\mathbf{x}} + b\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{z}}$ gilt müssen offenbar die Beziehungen

$$\|\mathbf{x}\|/\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{y}\|/\|\mathbf{z}\| = 1 \Rightarrow \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$$

erfüllt sein.

Dieses Ergebnis ist auch intuitiv klar: Angenommen, es gelte $\|\mathbf{x}\| \neq \|\mathbf{y}\|$. Die ungleichen Längen von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ gehen dann in die Koeffizienten a und b ein, damit für einen bestimmten Vektor $\mathbf{z}$ die Linearkombination $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \mathbf{z}$ gilt. Die Normierung der Vektoren bedeutet aber

$$\|\tilde{\mathbf{x}}\| = \|\tilde{\mathbf{y}}\| = \|\tilde{\mathbf{z}}\| = 1,$$

und die Koeffizienten α, β müssen so gewählt werden, dass für $\alpha\tilde{\mathbf{x}} + \beta\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{z}}$ die Bedingung $\|\tilde{\mathbf{z}}\| = 1$ gewahrt bleibt. Die Beziehung $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \mathbf{z}$ wird nur dann auf die Beziehung zwischen den normierten Vektoren vererbt, wenn $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ alle dieselbe Länge haben, die sich dann bei der Beziehung $\alpha\tilde{\mathbf{x}} + \beta\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{z}}$ herauskürzt.

Aufgabe 4: Es sei

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}, \quad -1 \leq r \leq 1$$

Für welche Vektoren $\mathbf{t}$ gilt

$$R\mathbf{t} = \lambda\mathbf{t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,?$$

Können Sie einen Ausdruck für die zugehörigen λ-Werte angeben? Angenommen, es gäbe zwei Vektoren $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$, diese Gleichung erfüllen. Zeigen Sie, dass dann notwendig $\mathbf{t}_1'\mathbf{t}_2 = 0$ gilt.

Hinweis: Es existieren zwei Vektoren $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$, die diese Beziehung erfüllen, mit zugehörigen Werten für λ. In einer Matrix $T = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2]$ zusammengefasst kann man

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{7}$$

betrachten. Zeigen Sie, dass $T'T = I$; welchen Wert hat der Winkel θ?

Antworten: Es sei $\mathbf{t} = (t_1, t_2)'$. Dann soll

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

gelten. Ausmultipliziert ergibt sich

$$\begin{aligned} t_1 + rt_2 &= \lambda t_1 & (8) \\ rt_1 + t_2 &= \lambda t_2 & (9) \end{aligned}$$

Dividiert man die beiden Gleichungen durcheinander, so fällt λ heraus:

$$\frac{t_1 + rt_2}{rt_1 + t_2} = \frac{t_1}{t_2}.$$

Man erhält

$$t_1 t_2 + rt_2^2 = t_1 t_2 + rt_1^2 \Rightarrow t_2^2 = t_1^2$$

Es ergibt sich eine Lösung $\mathbf{t}_1 = (t_1, t_1)'$ und eine zweite Lösung $\mathbf{t}_2 = (t_1, -t_1)'$. Offenbar ist $\mathbf{t}_1'\mathbf{t}_2 = t_1^2 - t_1^2 = 0$, d.h. die beiden Vektoren sind orthogonal.

Um λ zu bestimmen folgert man aus (8) unter der Voraussetzung $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 \neq \vec{0}$ (also $t_1, t_2 \neq 0$)

$$t_1 + rt_1 = \lambda t_1 \stackrel{t_1 = t_2}{\Rightarrow} \lambda = \lambda_1 = 1 + r,$$

und aus (9)

$$rt_1 - t_1 = -\lambda t_1 \stackrel{t_2 = -t_1}{\Rightarrow} \lambda = \lambda_2 = 1 - r$$

Es gilt tatsächlich $R\mathbf{t}_j = \lambda_j \mathbf{t}_j$, $j = 1, 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = (1 + r) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix},$$

wie man durch Nachrechnen leicht bestätigt, und die analoge Gleichung gilt für $\mathbf{t}_2$ mit $\lambda = \lambda_2$. λ_1 und λ_2 heißen *Eigenwerte* von R, die Vektoren $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ heißen *Eigenvektoren* von R; diese Namen ergeben sich aus dem Sachverhalt, dass *nur diese* Vektoren mit den zugehörigen λ-Werten der Gleichung $R\mathbf{t} = \lambda\mathbf{t}$ genügen; für beliebige Vektoren $\mathbf{x}$ gilt diese Beziehung *nicht*!

Für $r = 0$ folgt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$; während für $r = 1$ die Werte $\lambda_1 = 2$,$\lambda_2 = 0$ folgen. Zur Erinnerung: Ist r ein Korrelationskoeffizient, so ist r^2 der Determinationskoeffizient; er gibt den Anteil der vorausgesagten Varianz an der Gesamtvarianz an. Für $r = 0$ ist auch $r^2 = 0$, und in diesem Fall ist $\lambda_1 = \lambda_2$. Für $r = 1$ ist $r^2 = 1$ und nur $\lambda_1 \neq 0$. Offenbar haben die Eigenwerte etwas mit dem Ausmaß zu tun, in dem eine zufällige Veränderliche durch eine andere erklärt werden kann.

Dass die Spaltenvektoren der in (7) definierten Matrix T mit den hier hergeleiteten Vektoren $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ identisch sind, wird in der Vorlesung noch explizit hergeleitet. Jedenfalls gilt $T = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2]$ mit $\mathbf{t}_1 = (t_1, t_1) = (\cos\theta, \sin\theta)'$, d.h., es soll $\cos\theta = \sin\theta$ gelten; analog soll $\mathbf{t}_2 = (t_1, -t_1)'$ mit $-\sin\theta = -\cos\theta$, also ebenfalls $\cos\theta = \sin\theta$ gelten. Diese Bedingung ist für $\theta = \pi/4 \approx 0.7071068$ erfüllt. Für $\mathbf{t}_2 = (t_1, -t_1)'$ ergibt sich die Bedingung $\cos\theta = -\sin\theta$, d.h. $\theta = -\pi/4$. DieEigenvektoren $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ sind also von r unabhängig, während die Eigenwerte λ_1 und λ_2 abhängen. Die inhaltliche Bedeutung dieses Befundes wird später erläutert.

$T'T = I$ folgt wegen $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ und $\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta = 0$.

Aufgabe 5: V_1, V_2, V_3 seien physiologische Größen, die psychischen Stress repräsentieren. An hundert Vpn werden Messungen dieser Variablen vorgenommen, die in drei 100-dimensionalen Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$ zusammengefasst werden; die Komponenten von $\mathbf{x}_j$ enthalten die Messwerte für V_j, $j = 1, 2, 3$. Es zeigt sich, dass $\mathbf{x}_1 \nparallel \mathbf{x}_2$, aber $\mathbf{x}_2 \parallel \mathbf{x}_3$ ($\mathbf{x}_1$ ist nicht parrallel zu $\mathbf{x}_2$, aber $\mathbf{x}_2$ ist parallel zu $\mathbf{x}_3$). (Wenn die *Messungen* unabbhängig voneinander sind, bedeutet $\mathbf{x}_2 \parallel \mathbf{x}_3$, dass die Messungen praktisch messfehlerfrei sind!). Zeigen Sie, dass die $\mathbf{x}_j$, $j = 1, 2, 3$ eine Ebene im 100-dimensionalen Vektorraum definieren.

Antwort: Es sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ die lineare Hülle der drei Vektoren, d.h. $\mathcal{L}$ sei die Menge aller Linearkombinationen von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. $\mathbf{x}_2 \parallel \mathbf{x}_3$ bedeutet, dass $\mathbf{x}_3 = \lambda\mathbf{x}_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Es sei $\mathbf{y} \in \mathcal{L}$, d.h.

$$\mathbf{y} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + a_3\mathbf{x}_3, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

Wegen $\mathbf{x}_3 = \lambda\mathbf{x}_2$ folgt

$$\mathbf{y} = a_1\mathbf{x}_1 + (a_2 + a_3\lambda)\mathbf{x}_2, \quad a_2 + \lambda a_3 \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ sind linear unabhängig, da nicht parallel. Es sei $\mathbf{n}$ ein 100-dimensionaler Vektor, der nicht in $\mathcal{L}$ liegt, mit $\mathbf{n}'\mathbf{x}1 = \mathbf{n}'\mathbf{x}_2 = 0$. Dann folgt $\mathbf{n}'\mathbf{y} = 0$, d.h. $\mathbf{y}$ liegt in der von $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ aufgespannten Ebene.

Aufgabe 6: Es sei $U = \{\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 = (1, 2, 3)', \lambda \in \mathbb{R}\}$.
1. Zeigen Sie, dass U ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$ (d.h. des 3-dimensionalen Vektorraums) ist.
2. Zeigen Sie, dass sich die Vektoren $\mathbf{x}_1 = (-2, 1, 0)'$ und $\mathbf{x}_2 = (-3, 0, 1)'$ als Linearkombinationen der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)'$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)'$ und $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)'$ darstellen lassen.
3. Zeigen Sie, dass jeder Vektor (d.h. jede Linearkombination von $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$) $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig wählbar, orthogonal zu jedem Vektor $\mathbf{u} \in U$ ist.

Antwort: Zu 1.: $U \subset \mathbb{R}^3$. Es seien $\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_0$ und $\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 = (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)\mathbf{u}_0,$$

und da $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{u} \in U$, d.h. U ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$. U ist die Menge aller Vektoren, die auf einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ liegen.

Zu 2.: Es ist

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zu 3.: Es ist

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -(2\alpha + 3\beta) \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$\mathbf{x}'\mathbf{u} = -(2\alpha + 3\beta)\lambda + 2\alpha\lambda + 3\beta\lambda = 0,$$

für alle $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$.

Anmerkung: Der oben definierte Teilraum U sei gegeben, – wie findet man Vektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ mit der Eigenschaft, dass jede Linearkombination $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$ orthgonal zu $\mathbf{u} \in U$ ist?

Man beginnt damit, die geforderte Beziehung $\mathbf{y}'\mathbf{u} = 0$ anzuschreiben:

$$\mathbf{y}'\mathbf{u} = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 = 0.$$

$\mathbf{u}$ unterscheidet sich aber nur um einen Faktor λ von $\mathbf{u}_0 = (1, 2, 3)'$, also kann man insbesondere $\lambda = 1$ wählen. Dann hat man

$$\mathbf{y}'\mathbf{u}_0 = y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0 \Rightarrow y_1 = -2y_2 - 3y_3.$$

so dass man

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha - 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ansetzen kann; genau dann ist $\mathbf{y}'\mathbf{u}_0 = 0$. $\mathbf{y}$ ist aber eine Linearkombination $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$, und $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ müssen so gewählt werden, dass diese Gleichung erfüllt ist, d.h. es muß

$$\alpha x_{11} + \beta x_{12} = y_1 = -2\alpha - 3\beta$$

für die ersten Komponenten x_{11} und x_{12} von $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ gelten, für die zweiten Komponenten x_{21} und x_{22} muß $\alpha x_{21} + \beta x_{22} = \alpha$ und für die dritten muß $\alpha x_{31} +$

$\beta x_{32} = \beta$ erfüllt sein. Daraus ergeben sich die Definitionen

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

für $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$.

$\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ sind 3-dimensionale Vektoren, und je zwei 3-dimensionale Vektoren definieren eine Ebene in $\mathbb{R}^3$. Also definieren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ eine Ebene, und die Vektoren $\mathbf{u} \in U$ stehen senkrecht auf allen Vektoren dieser Ebene. $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ sind nicht parallel (man überzeuge sich, dass $\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2/\|\mathbf{x}_1\|\|\mathbf{x}_2\| < |1|!$). Also steht $\mathbf{u}_0$ auch senkrecht auf $\mathbf{y}_1 = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \beta_1\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{y}_2 = \alpha_2\mathbf{x}_1 + \beta_2\mathbf{x}_2$, also auf irgendwelchen Linearkombinationen von $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$. Tatsächlich findet man

$$\mathbf{u}_0'\mathbf{y}_1 = 1\alpha_1 \cdot -2 + 2\alpha_1 + 3\alpha_1 \cdot 0 = 0$$

und analog dazu gilt $\mathbf{u}_0'\mathbf{y}_2 = 0$, und damit $\mathbf{u}'\mathbf{y}_1 = \mathbf{u}'\mathbf{y}_2 = 0$ für beliebigen Vektor $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}_0$, denn $\mathbf{u}_0$ und $\mathbf{u}$ unterscheiden sich ja nur um den Faktor λ, der an der Orthogonalität nichts ändert. Die Vektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ sind also nicht die einzigen Vektoren, die gewählt werden können: jedes Paar $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$, das sich als Linearkombinationen von $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ ergibt und damit in der von diesen Vektoren erzeugten Ebene liegt ist orthogonal zu den Vektoren in U. Die Ebene $\mathcal{E}$ ist ebenfalls ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$, eben der zu U orthogonale Teilraum $\mathcal{E} = U^\perp$.

Alternative Lösung: Die Linearkombinationen der beiden Vektoren

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

liefern ebenfalls die Ebene, auf der $\mathbf{u}_0$ senkrecht steht, denn

$$\mathbf{u}_0'\mathbf{x} = \mathbf{u}_0'a\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_0 b\mathbf{x}_2 = \mathbf{u}_0' \begin{pmatrix} a \\ b \\ -\frac{1}{3}(a+2b) \end{pmatrix} = 0.$$

Man rechnet leicht nach, dass die in (11) definierten Vektoren Linearkombinationen der in (10) definierten Vektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ sind – und umgekehrt.